Mathematik.

Untersuchung über die kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde einer Hohen Philosophischen Fakultät der Schlesischen Friedrich Wilhelms-Universität zu Breslau

vorgelegt von

Maria Bienias, Studienassessorin
aus **Schwerin** i. M.

*

Promotion: 22. Februar 1928.

Druck von Franz Borgmeyer, Hildesheim.

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen Philosophischen Fakultät der Schlesischen Friedrich Wilhelms-Universität zu Breslau.

Referent: Geh. Hofrat Professor Dr. F. Schur

Rigorosum: 30. Juli 1927.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Eine angenehme Pflicht ist es mir, auch an dieser Stelle Herrn Geh. Hofrat Professor Dr. Schur für das wohlwollende Interesse Dank zu sagen, mit dem er diese Studien gefördert hat.

Inhaltsverzeichnis.

Literaturverzeichnis 5

Einleitung 7

I. Die Bedingung für die kollineare Erzeugungsmöglichkeit einer Fläche 4. Ordnung 10

§ 1. Nachweis einer Kurve 6. Ordnung c^6 auf der Kummerschen Fläche K^4 10

1.) Kurven 6. Ordnung, die in 3 Kegelschnitte durch einen Punkt zerfallen 10

2.) Die Bestimmung einer c^6 11

§ 2. Die kollinearen Erzeugungen der c^6 15

1.) Das F^3-Gebüsch durch c^6 15

2.) Die kollineare Zuordnung der c^6 erzeugenden Bündel mit Hilfe von Kurven 3. Ordnung auf den Flächen des F^3-Gebüsches 18

II. Die kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche K^4 23

§ 3. Nachweis der K^4 erzeugenden Gebüsche kollinearer Räume im Anschluß an e i n e c^6 23

1.) Bestimmung von 4 kollinearen K^4 erzeugenden Systemen 23

2.) Die mit einer Gleichungsform gegebene Mannigfaltigkeit von Erzeugungen der K^4 25

§ 4. Erfassung a l l e r kollinearen Erzeugungen der K^4 . 30

1.) Mehrfache Bestimmungsmöglichkeiten der c^6 . 30

2.) Die Mannigfaltigkeit der Kurven c^6 auf K^4 . . 38

Tabelle

Literatur.

E. E. Kummer, Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung. Berlin 1867. Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1866. (Zit.: Kummer, Abhandlungen.)

Derselbe, Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten. Berlin 1865. Monatsberichte der Königlichen Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1864. (Zit.: Kummer, Monatsberichte.)

Karl Kutscher, Über die kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche. Entwurf. Manuskript aus dem Besitze von Herrn Geheimrat Schur.

Theodor Reye, Geometrie der Lage. 2. Auflage, Bd. I, II. 1877. 3. Auflage, Bd. I, II, III. 1886—92. 4. Auflage, Bd. II. Stuttgart 1907 (Zit.: Reye II). 5. Auflage, Bd. 1. Leipzig 1909 (Zit.: Reye I).

Derselbe, Über die Kummersche Konfiguration von sechzehn Punkten und sechzehn Ebenen. Berlin 1879. Borchardts Journal, Bd. 86. (Zit.: Reye, Borchardts Journal, Bd. 86.)

Derselbe, Über Strahlensysteme zweiter Klasse und die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten. Berlin 1879. Borchardts Journal, Bd. 86. (Zit.: Reye, Borchardts Journal, Bd. 86.)

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl., Bd. II. Leipzig 1880. (Zit.: Salmon-Fiedler.)

Friedrich Schur, Über die durch kollineare Grundgebilde erzeugten Kurven und Flächen. Leipzig 1881. Mathematische Annalen, Bd. 18. (Zit.: Schur.)

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548214_0014

Einleitung.

Die nachstehende Arbeit verdankt ihre Anregung den Untersuchungen meines hochverehrten Lehrers, Herrn Geheimrat Professor Dr. Schur, über die Erzeugung von Flächen 4. Ordnung durch 4 kollineare räumliche Ebenensysteme (Math. Annalen Bd. 18). Es wird dort in systematischer Fortführung der Steinerschen und Reyeschen Entwicklungen von Kurven und Flächen durch Zuordnung kollinearer Grundgebilde zunächst gezeigt, daß jede ebene Kurve 3. Ordnung sich immer auf unendlich mannigfaltige Weise durch 3 kollineare ebene Systeme erzeugen läßt, wobei jeder Erzeugung eine eindeutige Transformation der Kurve in sich selbst entspricht, die in 9 besonderen Fällen eine lineare wird. Die Frage nach dem Erzeugnis von 4 kollinearen räumlichen Systemen ergibt dann, daß als räumliches Analogon der ebenen Kurve 3. Ordnung eine Fläche 4. Ordnung anzusehen ist, wobei jedoch der prinzipielle Unterschied besteht, daß nicht jede Fläche 4. Ordnung auf die genannte Weise erzeugt werden kann, wenn auch der Erzeugung ein hoher Grad von Allgemeinheit zukommt. Vorbedingung, daß eine Fläche 4. Ordnung die Erzeugung durch 4 kollineare räumliche Ebenensysteme zuläßt, ist vielmehr das Vorhandensein einer Kurve 6. Ordnung auf der Fläche, und zwar einer solchen, die durch 4 kollineare Ebenenbündel erzeugt werden kann. Mit einer Erzeugung durch 4 kollineare räumliche Systeme sind dann zugleich unendlich viele solche Erzeugungen der Fläche 4. Ordnung verknüpft, insofern sich statt der 4 ersten auch 4 beliebige Systeme des durch sie bestimmten Gebüsches von kollinearen Systemen auswählen lassen, wobei nur die eine Einschränkung besteht, daß die 4 Systeme nicht demselben Netz von kollinearen räumlichen Systemen angehören dürfen. Von Bedeutung ist diese Erzeugung einer Fläche 4. Ordnung durch ein Gebüsch von kollinearen räumlichen Systemen

auch deshalb, weil mit ihr ähnlich wie bei der ebenen Kurve 3. Ordnung eine umgekehrt eindeutige rationale Transformation der Fläche in sich verknüpft ist.

Nachstehend ist nun dargelegt, wie man die Kummersche Fläche K^4, die als Singularitätenfläche von 6 Strahlensystemen 2. Grades und ∞^1 Strahlenkomplexen 2. Grades sowie als Kernfläche eines Gebüsches von Flächen 2. Ordnung das Interesse der Geometer erregt hat, in einfacher Weise durch 4 kollineare räumliche Ebenensysteme erzeugen kann. Dabei ergibt sich die Fläche unter Benutzung homogener Punktkoordinaten in der von Kummer erstmalig gegebenen (und später bei der Bevorzugung einer Darstellung in Linienkoordinaten in der Literatur zurückgetretenen) Determinantenform. Unter dem Gesichtspunkt ihrer kollinearen Erzeugung verdient die Kummersche Fläche noch vor andern solchen Flächen 4. Ordnung durch den besonderen Umstand der hohen Mannigfaltigkeit von Erzeugungen Beachtung. Denn während eine Fläche 4. Ordnung, wenn sie überhaupt die kollineare Erzeugung zuläßt, im allgemeinen nur auf eine Weise durch ein Gebüsch von kollinearen räumlichen Systemen gewonnen wird, gestattet die besondere Anordnung der singulären Punkte und Ebenen der K^4 mehrere solche Erzeugungen, und zwar, wie sich zeigen wird, 320 an der Zahl. Mit jeder dieser Erzeugungen ist eine eindeutige Transformation der Fläche in sich verknüpft, deren Untersuchung sich im folgenden auf die Angabe des analytischen Verfahrens zur Aufsuchung des einem Punkte entsprechenden Punktes beschränkt.

Sind hiermit Ziel und Weg der Untersuchung im wesentlichen vorgezeichnet, so ist die Arbeit im einzelnen ein erweiterter und, wie ich glaube, vertiefter Ausbau der Arbeit von Karl Kutscher über die kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche nach einem mir von Herrn Geheimrat Schur freundlich zur Verfügung gestellten Manuskript, das infolge des Heldentodes des Verfassers im Weltkrieg unvollendet blieb. Es ist mir eine Freude, in den nachstehenden Seiten die begonnene Arbeit, der ich besonders im 1. Teil meiner Darlegungen manche Anregung verdanke, zu Ende zu führen. Die Schrift von Karl Kutscher behandelt die Kummer-

sche Fläche abweichend von meiner Arbeit als Symmetroid. Wo ich auf sie zurückgegriffen habe, ist überall eine schärfere Begründung und Aneinanderreihung der einzelnen Schritte der Rechnung — als sie das Manuskript aufwies — erstrebt und versucht worden. Als eigentliche Weiterführung darf ich sodann die Ausführungen über die eindeutige Transformation der Fläche in sich und die Mannigfaltigkeit der kollinearen Erzeugungsmöglichkeiten der Kummerschen Fläche ansprechen, und zwar soweit die Erzeugungen durch die bestimmte Gleichungsform der Kurve 6. Ordnung und den Weg über eine bestimmte solche c^6 bedingt sind.

I. Die Bedingung für die kollineare Erzeugungsmöglichkeit einer Fläche 4. Ordnung.

§ 1. Nachweis einer Kurve 6. Ordnung c^6 auf der Kummerschen Fläche K^4.

1.) Kurven 6. Ordnung, die in 3 Kegelschnitte durch einen Punkt zerfallen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Erzeugung einer Fläche 4. Ordnung F^4 durch 2 konjugierte Gebüsche von kollinearen räumlichen Ebenensystemen ist das Vorhandensein einer Kurve 6. Ordnung c^6 auf F^4, und zwar einer c^6, die sich durch ein Netz kollinearer Systeme oder das ihm konjugierte Gebüsch von kollinearen Ebenenbündeln erzeugen läßt (vgl. Schur S. 31).

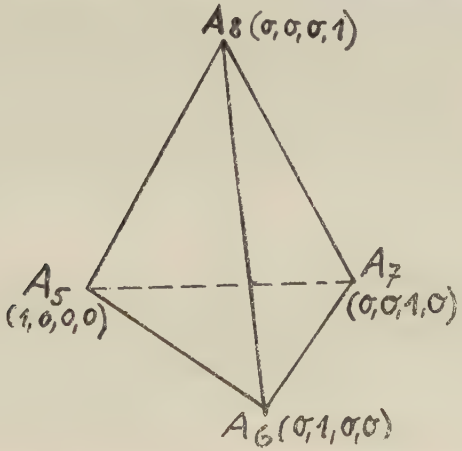
Die Kummersche Konfiguration der 16 Knotenpunkte A_ν und 16 singulären Ebenen α_ν — in jeder Ebene, und zwar auf einem Kegelschnitte liegen 6 Knotenpunkte, und durch jeden Knotenpunkt gehen 6 singuläre Ebenen — die aus den am Schluß beigefügten Tabellen (s. Kummer, Abhandlungen, S. 66) ersichtlich ist, gestattet den Nachweis einer c^6 von vorgeschriebener Erzeugungsweise auf der Kummerschen Fläche K^4. Von den 16 Kegelschnitten lassen sich drei als eine zerfallende c^6 auffassen, sofern sie nicht zugleich auf einer Fläche 2. Ordnung liegen (Schur, S. 14). Diese Bedingung wird durch drei Kegelschnitte erfüllt, die sich zu dreien in einem Punkte und zu je zweien in je einem weiteren Punkte schneiden (Schur, S. 32). Denn wenn diese drei Kegelschnitte auf einer Fläche 2. Grades F^2 lägen, so müßten ihre Tangenten in dem gemeinsamen Punkte der Tangentialebene der F^2 angehören. Das stände aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß die 6 durch einen Punkt gehenden singulären Tangentialebenen der Kummerschen

Fläche K^4 einen K^4 einhüllenden in 6 Ebenen zerfallenden Kegel 6. Grades bilden (Kummer, Monatsberichte, S. 246).

Als eine c^6 lassen sich danach die durch Punkt A_8 gehenden Kegelschnitte der Ebenen α_1, α_2, α_3 auffassen (vgl. Tabelle).

2.) Die Bestimmung einer c^6.

Zur Bestimmung der Kurve c^6 benützen wir die Tatsache, daß die Kummersche Fläche durch 18 Konstanten eindeutig bestimmt ist (Kummer, Monatsberichte, S. 250). Durch $4 \cdot 3 = 12$ Konstanten sind die gemeinsamen Schnittpunkte A_8, A_7, A_6, A_5 der 3 Kegelschnitte und damit die vier diese Punkte verbindenden Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 festgelegt. Wählen wir die Punkte A_8, A_7, A_6, A_5 zu



Ecken des Koordinatentetraeders, so haben die Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 in homogenen projektiven Koordinaten bezw. die Gleichungen:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0.^1)$$

Zur Ermittelung von 3 weiteren Punkten, z. B. A_1, A_2, A_3 auf c^6 ist zu berücksichtigen, daß diese Punkte zu je zweien in den Ebenen α_5, α_6, α_7 liegen und die Ebene $A_1\ A_2\ A_3$ durch Punkt A_8 geht. Um die Gleichungen der Ebenen α_5, α_6, α_7 aufzustellen, wird der

[1]) Hierbei wie im folgenden stets wählen wir die Bezeichnungen so, daß sich Knotenpunkte und Ebenen in der historischen Form von Kummer ergeben. (Vgl. Kummer, Abhandlungen, S. 65.)

gemeinsame Punkt A_4 dieser 3 Ebenen durch die Konstanten 13 und 14, $a : a_2$, $a_1 : a_2$, bestimmt; als in der Ebene α_4 liegend hat er dann die Koordinaten $(a, a_1, a_2, 0)$. Für die Ebene α_5 ergeben sich dann die Koordinaten: $u_1 = 0$, da sie durch den Punkt A_5 geht, und: $-a_1 : a_2 = u_3 : u_2$, da sie Punkt A_4 enthält. Analog findet man für die Ebene α_6 durch die Punkte A_6 und A_4:

$$u_2 = 0, \qquad u_1 : u_3 = -a_2 : a,$$

und für die Ebene α_7 durch die Punkte A_7 und A_4:

$$u_3 = 0, \qquad u_1 : u_2 = -a_1 : a.$$

Nennen wir nun die vierten Koordinaten der 3 Ebenen bezw. b, b_1, b_2, so ergeben sich die Gleichungen der Ebenen α_5, α_6, α_7 bezw. in der Form:

(2a) α_5: $\quad r \equiv a_2 y - a_1 z - b\, t = 0$

(2b) α_6: $\quad r_1 \equiv a\, z - a_2 x - b_1 t = 0$

(2c) α_7: $\quad r_2 \equiv a_1 x - a\, y - b_2 t = 0.$

Zur Bestimmung der Größen b, b_1, b_2 ist zu beachten, daß die Ebenen: $\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7$; $\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7$; $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$ sich bezw. in den Punkten A_1, A_2, A_3 schneiden und die Ebene $A_1\, A_2\, A_3$ durch Punkt A_8 geht. Für Punkt A_1 gelten danach die Bedingungsgleichungen:

$$x = 0, \quad -a_2 x + a z - b_1 t = 0, \quad a_1 x - a y - b_2 t = 0;$$

$$a : b_1 = t : z, \qquad a : -b_2 = t : y.$$

Punkt A_1 hat also die Koordinaten: $(0, -b_2, b_1, a)$. Analoge Gleichungen ergeben für die Punkte A_2 und A_3 die Koordinaten $(b_2, 0, -b, a_1)$ und $(-b_1, b, 0, a_2)$. Daraus folgen für die Ebene α_8 die Bedingungsgleichungen:

Durch Punkt A_1: $\quad -u_2 b_2 + u_3 b_1 + u_4 a = 0,$

„ „ A_2: $\quad u_1 b_2 - u_3 b + u_4 a_1 = 0,$

„ „ A_3: $\quad -u_1 b_1 + u_2 b + u_4 a_2 = 0,$

„ „ A_8: $\quad u_4 = 0;$

$u_2 : u_3 = b_1 : b_2, \qquad u_1 : u_3 = b : b_2. \qquad u_1 : u_2 = b : b_1.$

Die Ebene α_8 hat also die Gleichung:

(3) $$b\, x + b_1\, y + b_2\, z = 0.$$

Da diese Gleichung für ganz beliebige Werte von b, b_1, b_2 erfüllt ist, so können wir durch die 15., 16. und 17. Konstante b, b_1, b_2

bestimmen. Durch die so gewonnenen Punkte A_ν und Ebenen α_ν ($\nu = 1,2 \ldots ,8$) sind die c^6 bildenden Kegelschnitte je in vier Punkten, also bis auf je einen Punkt bekannt. Wir benützen nun zur vollständigen Bestimmung der Kegelschnitte die von Reye (Borchardts Journal, Bd. 86, S. 212) bewiesene Tatsache, daß die Gruppen von je 6 Punkten der Kummerschen Konfiguration, die in den 16 Ebenen liegen, und die Gruppen von je 6 Ebenen, die durch die 16 Punkte gehen, alle zueinander projektiv sind. Ist also erst einmal einer der Kegelschnitte bekannt, so lassen sich die anderen Kegelschnitte projektiv auf ihn beziehen und dadurch bestimmen. Wir verwenden nun die letzte verfügbare der 18 Konstanten zur Festlegung eines fünften Knotenpunktes der Ebene α_4. Dadurch ist dann der Kegelschnitt c_t^2 dieser Ebene eindeutig bestimmt. Dieser Kegelschnitt durch die Tetraederecken A_5, A_6, A_7 hat die Gleichung:

$$c_t^2 = c_2 x y + c y z + c_1 z x = 0;$$

Punkt A_4 auf diesem Kegelschnitt liefert für die Koeffizienten c_i die Bedingungsgleichung:

$$c_2 a a_1 + c a_1 a_2 + c_1 a_2 a = 0, \text{ oder:}$$

$$\frac{c_2}{a_2} + \frac{c}{a} + \frac{c_1}{a_1} = 0 \text{ und durch die Substitution: } \frac{c_i}{a_i} = \delta_i:$$

$$\delta + \delta_1 + \delta_2 = 0. \tag{4}$$

Bezeichnet nun die 18. Konstante eines der Verhältnisse $\delta : \delta_1 : \delta_2$, so ist damit die Gleichung des Kegelschnittes α_4 hinreichend bestimmt:

$$c_t^2 = a_2 \delta_2 x y + a_1 \delta_1 x z + a \delta y z = 0. \tag{5}$$

Zur Herstellung der projektiven Beziehung zwischen diesem und den c^6 bildenden Kegelschnitten werden die c_t^2 erzeugenden Strahlenbüschel gesucht. Die Identität (4) ermöglicht die Umformung von (5):

$$\begin{aligned} c_t^2 &= a_2 \delta_2 x y + a_1 \delta_1 x z - a (\delta_1 + \delta_2) y z = 0, \\ &= z \delta_1 (a_1 x - a y) + y \delta_2 (a_2 x - a z) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_1 z}{\delta_2 y} = \frac{a z - a_2 x}{a_1 x - a y}.$$

Danach stellt sich die Gleichung von c_t^2 unter Benützung von (2) dar in der Form:

$$\left[\frac{r_1}{r_2} = \frac{\delta_1 z}{\delta_2 y}\right]_{t=0} \text{ oder:}$$

(5a) $$[r_1 \delta_2 y - r_2 \delta_1 z]_{t=0} = 0,$$

die unmittelbar die beiden c_t^2 erzeugenden Strahlenbüschel erkennen läßt:

(6) $$[\lambda r_1 - \mu \delta_1 z]_{t=0} = 0 \quad \text{und}$$

(7) $$[\lambda r_2 - \mu \delta_2 y]_{t=0} = 0.$$

Zwei zu den Büscheln (6) und (7) projektive Büschel der Ebene α_1 bestimmen nun den Kegelschnitt c_x^2.

Den Strahlen des Büschels (6):

(8) $$\begin{cases} [r_1 = 0]_{t=0} = A_4 A_6 \\ [z = 0]_{t=0} = A_5 A_6 \\ [x = 0]_{t=0} = A_7 A_6, \end{cases}$$

müssen also Verbindungslinien homologer Punkte der Ebene α_1 als Strahlen des entsprechenden Büschels zugeordnet sein. Nach der Tabelle, in der die homologen Punkte in gleicher Horizontalreihe stehen (Reye, Borchardts Journal Bd. 86, S. 101, 103), entspricht dem Büschel der Ebene α_4 mit dem Zentrum A_6 in Ebene α_1 ein Büschel mit dem Zentrum A_7. Den Strahlen (8) entsprechen die Strahlen:

(9) $$\begin{cases} [r_2 = 0]_{x=0} = A_1 A_7 \\ [y = 0]_{x=0} = A_8 A_7 \\ [t = 0]_{x=0} = A_6 A_7. \end{cases}$$

Nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (Reye I, S. 52) ist durch die Zuordnung der 3 Strahlen (8) und (9) die Projektivität der Büschel eindeutig bestimmt, die Verbindungslinie A_7 A_6 entspricht sich selbst. Dem Büschel (6) entspricht also das Büschel:

(10) $$[\lambda r_2 + \mu \delta_1 y]_{x=0} = 0.$$

In analoger Weise sind den Strahlen des Büschels (7) durch Punkt A_7:

$$(11)\qquad \begin{cases} [r_2 = 0]_{t=0} = A_4A_7, \\ [y = 0]_{t=0} = A_5A_7, \\ [x = 0]_{t=0} = A_6A_7, \end{cases}$$

in Ebene α_1 die Strahlen:

$$(12)\qquad \begin{cases} [r_1 = 0]_{x=0} = A_1A_6, \\ [z = 0]_{x=0} = A_8A_6, \\ [t = 0]_{x=0} = A_7A_6 \end{cases}$$

des Büschels mit dem Zentrum A_6 zugeordnet. Die Gleichung dieses Büschels ist danach:

$$(13)\qquad [\lambda r_1 + \mu \delta_2 z]_{x=0} = 0.$$

Da nun: Büschel (10) projektiv Büschel (6),
„ (6) „ „ (7),
„ (7) „ „ (13) ist,

so ist auch: Büschel (10) projektiv Büschel (13), und ihr Erzeugnis c_x^2 stellt sich in der Form dar:

$$(14)\qquad c_x^2 = \left[\frac{r_2}{r_1} = \frac{\delta_1 y}{\delta_2 z}\right]_{x=0} \quad \text{oder:} \quad [r_2\delta_2 z - r_1\delta_1 y]_{x=0} = 0.$$

In analoger Weise oder durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben sich die Gleichungen der Kegelschnitte c_y^2 und c_z^2:

$$(15)\qquad c_y^2 = [r\delta x - r_2\delta_2 z]_{y=0} = 0,$$

$$(16)\qquad c_z^2 = [r_1\delta_1 y - r\delta x]_{z=0} = 0.$$

Damit sind nun die drei Kegelschnitte, die die Kurve 6. Ordnung zusammensetzen, vollkommen eindeutig bestimmt, und es ist nun der Beweis zu erbringen, daß sich diese Kurve 6. Ordnung auf der Kummerschen Fläche durch ein Netz kollinearer Systeme oder das konjugierte Gebüsch von kollinearen Ebenenbündeln erzeugen läßt.

§ 2. Die kollinearen Erzeugungen der c^6.

1.) Das F^3-Gebüsch durch c^6.

Das Gebüsch der kollinearen c^6 erzeugenden Ebenenbündel ist durch 4 kollineare Bündel bestimmt, die zu je dreien 4 Flächen 3. Ordnung F^3 des durch c^6 hindurchgehenden F^3-Gebüsches erzeugen. Dann wird c^6 nämlich auch erzeugt durch irgend 4 kolli-

neare Bündel der durch die 4 Flächen 3. Ordnung bestimmten Netze von kollinearen Ebenenbündeln, vorausgesetzt, daß diese 4 Bündel nicht demselben Netze angehören. (Schur, S. 14.) Von den Flächen des F^3-Gebüsches durch c^6 haben je drei im allgemeinen nur einen Punkt außerhalb c^6 gemein und schneiden sich je zwei außer in c^6 noch in einer Kurve 3. Ordnung c^3. (Schur, S. 15.) Als Mittelpunkte der 4 kollinearen Bündel, die zu je dreien 4 Flächen 3. Ordnung erzeugen, lassen sich dann zweckmäßig die 4 außerhalb c^6 liegenden Schnittpunkte von je dreien der 4 Flächen F^3 auffassen.

Als Grundflächen des F^3-Gebüsches wählt man zweckmäßig (Vgl. Anmerkung S. 18) die folgenden Flächen 3. Ordnung, die je in eine der Kegelschnittebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und eine Fläche *2.* Grades durch Punkt A_4 und die beiden übrigen Kegelschnitte zerfallen. Es setze sich zusammen:

F_1^3 aus der Ebene $x = 0$ und F_1^2 durch A_4 und c_y^2, c_z^2;
F_2^3 „ „ „ $y = 0$ „ F_2^2 „ „ „ c_z^2, c_x^2;
F_3^3 „ „ „ $z = 0$ „ F_3^2 „ „ „ c_x^2, c_y^2.

F_0^3 sei ein in die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ zerfallender Kegel. Dabei werde vorausgesetzt, daß die Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2 nicht ihrerseits in je *2* Ebenen zerfallen, da sonst das F^3-Gebüsch in ein F^3-Bündel ausarten würde.

Es ist evident, daß diese Flächen den folgenden Gleichungen genügen:

(17) $$F_0^3 = x\,y\,z = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{2\delta\delta_1\delta_2}\begin{vmatrix} 0 & \delta_2 z & \delta_1 y \\ \delta_2 z & 0 & \delta\, x \\ \delta_1 y & \delta\, x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

(18) $$F_1^3 = x\,[-\,r\delta\,x + r_1\delta_1 y + r_2\delta_2 z] = 0,$$

$$\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \delta_2 z & \delta_1 y & r \\ 0 & \delta\, x & r_1 \\ \delta\, x & 0 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

(19) $$F_2^3 = y\,[r\delta x - r_1\delta_1 y + r_2\delta_2 z] = 0,$$

$$\frac{1}{\delta_1}\begin{vmatrix} \delta_1 y & 0 & r \\ \delta x & \delta_2 z & r_1 \\ 0 & \delta_1 y & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

(20) $$F_3^3 = z\,[r\delta x + r_1\delta_1 y - r_2\delta_2 z] = 0,$$

$$\frac{1}{\delta_2}\begin{vmatrix} 0 & \delta_2 z & r \\ \delta_2 z & 0 & r_1 \\ \delta_1 y & \delta x & r_2 \end{vmatrix} = 0;$$

denn einmal gehen die durch die Klammerausdrücke dargestellten Flächen *2.* Grades durch Punkt A_4, für den die Gleichungen r, r_1, r_2 identisch verschwinden (Vgl. oben S. 12), und zum anderen erhellt aus einem Vergleich mit den Gleichungen der Kegelschnitte c_x^2, c_y^2, c_z^2 (S. 15), daß diese vollständig auf den betreffenden Flächen enthalten sind. Durch *2* Kegelschnitte, die in verschiedenen Ebenen liegen, und einen außerhalb derselben liegenden Punkt ist aber eine Fläche *2.* Grades eindeutig bestimmt. (Reye II, S. 40.)

Daß diese zerfallenden Flächen *3.* Ordnung der allgemeinen kollinearen Erzeugungsweise der Flächen *3.* Ordnung genügen, geht ohne weiteres aus der Matrix:

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta_2 z & \delta_1 y & r \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

hervor. Den synthetischen Beweis führen wir für eine der Flächen *3.* Ordnung, z. B. F_1^3. Nimmt man die Zentren der die Fläche F_1^3 erzeugenden Ebenenbündel in der Ebene des Kegelschnittes c_x^2 an und verbindet jedes der 3 Zentren 1.) mit den Punkten A_7 und A_6, die c_x^2 bezw. mit c_y^2 und c_z^2 gemein hat; *2.*) mit dem Schnittpunkt A_5 von c_y^2 und c_z^2 und 3.) mit je *2* weiteren Punkten der beiden Kegelschnitte c_y^2 und c_z^2 — also z. B. den Punkten A_2, A_{10} und A_3, A_{11} — so gibt es ∞^1 Kollineationen, bei welchen jeder Ebene durch einen dieser 7 Strahlen eine Ebene durch einen der 7 entsprechenden Strahlen zugeordnet ist. (Vgl. Heinrich Schroeter, Crelles Journal, Bd. *62*, S. 215.) Da nun von den 7 Strahlen *2* —

nämlich die nach den Punkten A_7 und A_6 — in der Ebene von c_x^2 liegen, so entspricht diese Ebene sich selbst. Folglich zerfällt F_1^3 in die Ebene $x = 0$ und eine Fläche 2. Grades, die von den Kegelschnitten c_y^2 und c_z^2 je 4 Punkte enthält. Aber noch ein 5. Punkt A_8 dieser Kegelschnitte liegt auf der Fläche 2. Grades als gemeinsamer Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte in der sich selbst entsprechenden Ebene, in der die Strahlen von den 3 Zentren nach dem gemeinsamen Punkte A_8 einander zugeordnet sind. Damit ist F_1^3 eindeutig bestimmt, sobald wir eine der ∞^1 Flächen F^2 durch die beiden Kegelschnitte mit der Annahme eines außerhalb liegenden Punktes A_4 festlegen.[1])

Das durch die 4 Flächen 3. Ordnung bestimmte F^3-Gebüsch ist danach:

$$(21) \quad [F^3] = \lambda_0 xyz + \lambda x [-r\delta x + r_1\delta_1 y + r_2\delta_2 z] + \lambda_1 y [r\delta x - r_1\delta_1 y + r_2\delta_2 z] + \lambda_2 z [r\delta x + r_1\delta_1 y - r_2\delta_2 z] = 0$$

und ergibt für alle Werte der λ die verschiedenen Flächen F^3.

2.) Die kollineare Zuordnung der c^6 erzeugenden Bündel mit Hilfe von Kurven 3. Ordnung auf den Flächen des F^3-Gebüsches.

Zur Bestimmung von 4 kollinearen c^6 erzeugenden Ebenenbündeln benützen wir der Einfachheit des analytischen Ausdrucks halber die 4 Grundflächen des F^3-Gebüsches. Punkt A_4, der gemeinsame Punkt der Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2, ist zugleich Schnittpunkt der drei Flächen F_1^3, F_2^3, F_3^3 und damit Zentrum des ersten der gesuchten Bündel.

---

[1]) Es ist auch leicht einzusehen, daß diese Fläche F_1^3 den 19 erforderlichen Bedingungen einer Fläche 3. Ordnung genügt. Die Eckpunkte des Koordinatentetraeders $A_8\,A_7\,A_6\,A_5$ gelten als Knotenpunkte der F^3 für 12 Bedingungen, da die 3 partiellen Ableitungen der Flächengleichung für sie verschwinden. (Vgl. Salmon-Fiedler II, S. 371, wonach die Doppelpunkte einer c^6 Knotenpunkte der durch sie gehenden F^3 sind.) Vier weitere Punkte A_2, A_3, A_{10}, A_{11} bestimmen c_y^2 und c_z^2; Punkt A_4 als neunter legt eindeutig F_1^2 fest und bis auf 2 Punkte auch F_1^3. Von diesen beiden wählt man Punkt A_1 so, daß er auf F_1^2 liegt, nämlich auf den Kegelschnitten α_6 und α_7, und Punkt A_9 oder A_{13} in der Ebene α_1 zur vollständigen Bestimmung von c_x^2. c_x^2 hat also mit F_1^2 die Punkte

(Vgl. o. S. 16). Seine auf α_5, α_6, α_7 als Grundebenen bezogene Gleichung ist:

$$\lambda r + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0. \tag{22}$$

Die Flächen F^3_0, F^3_1, F^3_2; F^3_0, F^3_1, F^3_3; F^3_0, F^3_2, F^3_3 schneiden sich nun zwar außer in c^6 nicht in je einem Punkte, wie verlangt war, (Vgl. o. S. 16), sondern bezw. in den Graden $A_8\,A_7$, $A_8\,A_6$, $A_8\,A_5$, was die Ausartung der andern 3 gesuchten Ebenenbündel in die Ebenenbüschel $A_8\,A_7$, $A_8\,A_6$, $A_8\,A_5$ zur Folge hat. Dieser Umstand bedeutet indes keine wesentliche Spezialisierung der Erzeugung von c^6, ist vielmehr durchaus mit den allgemeinen kollinearen Erzeugungen der c^6 verknüpft. Denn erstens lassen schon die in Determinantenform dargestellten Grundflächen des F^3-Gebüsches [(17) — (20)] — und deren allgemeine Erzeugungsweise war ja nachgewiesen worden (S. 17 f.) — unter den erzeugenden Bündeln solche erkennen, die in Büschel ausarten. Zweitens sind die Achsen $A_8\,A_7$, $A_8\,A_6$, $A_8\,A_5$ mehrfache Sekanten der c^6, denn die Punkte A_7, A_6, A_5 sind Doppelpunkte, und A_8 ist ein dreifacher Punkt der c^6. Da unter den unendlich vielen Bündeln, die einen Punkt der c^6 zum Zentrum haben, immer 3 zu Ebenenbüscheln entarten, deren Achsen dreifache Sekanten der c^6 sind (Schur, S. 14), so ist damit die Allgemeinheit der gewählten Erzeugungsweise der c^6 sichergestellt.

In bezug auf die in den 3 Sekanten $A_8\,A_7$, $A_8\,A_6$, $A_8\,A_5$ sich bezw. schneidenden Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ stellen sich dann die 3 Büschel dar in der Form:

$$\begin{cases} \mu x + \mu_1 y + 0 = 0 \\ \nu x + 0 + \nu_2 z = 0 \\ 0 + \varkappa_1 y + \varkappa_2 z = 0. \end{cases} \tag{23}$$

$A_8\,A_7\,A_6\,A_1$ gemein und erfüllt damit die Bedingung für eine zerfallende F^3, daß die F^2 Punkte eines der Zerfallsebene angehörenden Kegelschnitts enthalte. Dank der Kummerschen Konfiguration genügen also 13 Knotenpunkte auf c^6 mit einem der außerhalb liegenden A_4, A_{12}, A_{16} vollständig zur Bestimmung von 4 Flächen 3. Ordnung durch c^6. — Dieser Hinweis wurde für nötig erachtet, weil erst durch ihn die Wahl gerade dieser zerfallenden Flächen F^3 als Grundflächen des F^3-Gebüsches ihre volle Rechtfertigung findet.

Der Nachweis der kollinearen Beziehungen zwischen dem Bündel A_4 und den Büscheln $A_5\ A_7$, $A_8\ A_6$, $A_8\ A_5$ erfolgt mit Hilfe der $c_{i\,k}^{3}$, in denen sich je *2* der *3* Flächen F_1^3, F_2^3, F_3^3 noch außerhalb c^6 schneiden. Wir benützen dazu den Satz, daß das Sekantensystem einer Raumkurve *3.* Ordnung aus den Punkten der Kurve durch *2* kollineare Ebenenbündel projiziert wird. (Reye II, S. 167.) Da jedesmal 3 c^3 durch die gemeinsamen Punkte dreier Flächen F^3 gehen, so wählt man als Zentren der beiden die $c_{i\,k}^{3}$ erzeugenden Bündel zweckmäßig die Schnittpunkte von: F_0^3, F_i^3, F_k^3, und F_0^3, F_k^3, F_l^3 (i, k, l = 1, *2*, 3.). Danach läßt sich erzeugen:

$c_{1\,2}^{3}$, Schnittkurve von F_1^3 u. F_2^3, durch Bündel A_4 u. Büschel $A_8\ A_7$,
$c_{2\,3}^{3}$, „ „ F_2^3 u. F_3^3, „ „ A_4 „ „ $A_8\ A_5$,
$c_{3\,1}^{3}$, „ „ F_3^3 u. F_1^3, „ „ A_4 „ „ $A_8\ A_6$.

Die kollineare Zuordnung von Bündel und Büschel ist bestimmt, sobald diejenigen Ebenen einander als homologe zugewiesen sind, die sich in Bisekanten der c^3 schneiden. (Reye II, S. 167.) Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Bisekanten der $c_{i\,k}^{3}$. Es zerfällt:

$c_{1\,2}^{3}$ in die Grade $A_8\ A_7$ und den Kegelschnitt $\alpha_7 = c_{r\,2}^{2}$
$c_{1\,3}^{3}$ „ „ „ $A_8\ A_6$ „ „ „ $\alpha_6 = c_{r\,1}^{2}$
$c_{2\,3}^{3}$ „ „ „ $A_8\ A_5$ „ „ „ $\alpha_5 = c_{r}^{2}$.

In diesem Falle sind also die Bisekanten der Kurven $c_{i\,k}^{3}$ die Verbindungsgraden der Punkte des Kegelschnitts und der Graden. (Reye II, S. 159.) Die Sehnen der $c_{1\,2}^{3}$, die einen Punkt P von $c_{r\,2}^{3}$ mit den Punkten der Graden $A_8\ A_7$ verbinden, werden durch die Ebenen des Büschels A_4 P aus der Ebene $A_8\ A_7$ P des Büschels $A_8\ A_7$ ausgeschnitten. Folglich entspricht je einer Ebene des Büschels $A_8\ A_7$ dasjenige Ebenenbüschel des Bündels A_4, das mit ihr den gleichen Punkt des Kegelschnittes $c_{r\,2}^{2}$ ausschneidet. Die Kollineation von Büschel $A_8\ A_7$ und Bündel A_4 ist vollständig bestimmt, wenn den Ebenen $A_8\ A_7\ A_{15}$, $A_8\ A_7\ A_{11}$, $A_8\ A_7\ A_2$, $A_8\ A_7\ A_1$ bezw. die Ebenenbüschel $A_4\ A_{15}$, $A_4\ A_{11}$, $A_4\ A_2$, $A_4\ A_1$ als entsprechend zugeordnet sind (Reye II, S. 7 f.). In analoger Weise bestimmt sich die Kollineation von Bündel A_4 und Büschel $A_8\ A_6$ bezw. $A_8\ A_5$ mit Hilfe der Punkte A_{14}, A_{10}, A_3, A_1 bezw. A_{13}, A_9, A_3, A_2.

Analytisch findet die Kollineation von Bündel A_4 und Büschel $A_8\ A_7$ ihren Ausdruck darin, daß die μ_i als lineare Funktionen der λ_i so bestimmt werden, daß sich die zu gleichen Werten der λ_i gehörenden Ebenen des Bündels

(22) $$\lambda r + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0$$

und des Büschels

(23a) $$\mu x + \mu_1 y = 0$$

in demselben Punkte des Kegelschnitts $c^2_{r_2}$:

(24) $$r \delta x - r_1 \delta_1 y = 0,\ r_2 = 0$$

treffen. Die Gleichung (22) ergibt folglich:

$$\lambda r + \lambda_1 r_1 = 0,\ r_1 : r = -\lambda : \lambda_1.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (24) ein, so ergeben sich für x und y die Werte:

$$x : y = -\lambda \delta_1 : \lambda_1 \delta,$$

die mit den aus (23a) erhaltenen:

$$x : y = -\mu_1 : \mu$$

für die μ_i die Proportionen ergeben:

$$\mu : \mu_1 = \lambda_1 \delta : \lambda \delta_1.$$

Das kollinear auf Bündel A_4 bezogene Büschel $A_8\ A_7$ hat also die Gleichung:

(23a) $$\lambda_1 \delta x + \lambda \delta_1 y = 0.$$

Analog bezieht man die Büschel $A_8\ A_6$ und $A_8\ A_5$ auf Bündel A_4 mit Hilfe von:

(25) $$c^2_{r_1} = r \delta x - r_2 \delta_2 z = 0,\ r_1 = 0 \text{ und}$$

(26) $$c^2_r = r_1 \delta_1 y - r_2 \delta_2 z = 0,\ r = 0$$

und findet für sie die Gleichungen:

(23b) $$\lambda_2 \delta x + \lambda \delta_2 z = 0$$

(23c) $$\lambda_2 \delta_1 y + \lambda_1 \delta_2 z = 0.$$

Bündel (22) und die Büschel (23a), (23b) erzeugen F^3_1; (22), (23a), (23c) F^3_2; (22), (23b), (23c) F^3_3; (23a), (23b), (23c) F^3_0.

Damit sind die 4 kollinearen c^6 erzeugenden Ebenenbündel (Vgl. o. S. 15) gefunden:

$$(27)\qquad \begin{cases} S_1 = \lambda r \;\; + \lambda_1 r_1 \;\; + \lambda_2 r_2 \;\; = 0, \\ S_2 = \lambda \delta_1 y + \lambda_1 \delta x \;\; + 0 \;\; = 0, \\ S_3 = \lambda \delta_2 z + 0 \;\; + \lambda_2 \delta x \;\; = 0, \\ S_4 = 0 \;\; + \lambda_1 \delta_2 z + \lambda_2 \delta_1 y = 0; \end{cases}$$

und das Gebüsch [S] der c^6 erzeugenden kollinearen Ebenenbündel erhält man in der Form:

$$(27a)\qquad [S] = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_3 + \sigma_4 S_4 = 0,$$

worin σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 alle Werte von 0 bis $\pm\infty$ annehmen können. Zugleich liefern die Gleichungen (27) drei kollineare räumliche Systeme der konjugierten Erzeugung von c^6. Ein System der konjugierten Erzeugung umfaßt alle die Ebenen, die einer Ebene eines Bündels in den übrigen Bündeln des Gebüsches entsprechen. (Schur, S. 16.) Ordnet man also z. B. den 3 Bestimmungsebenen des Bündels S_1 die ihnen in den Bündeln S_2, S_3, S_4 entsprechenden Ebenen — also die Bestimmungsebenen dieser Bündel — zu, so bestimmen diese die 3 Systeme:

$$(28)\qquad \begin{cases} \Sigma_1 = \nu' r \;\; + \mu' \delta_1 y + \lambda' \delta_2 z = 0, \\ \Sigma_2 = \nu' r_1 + \mu' \delta \;\; x + \varkappa' \delta_2 z = 0, \\ \Sigma_3 = \nu' r_2 + \lambda' \delta \;\; x + \varkappa' \delta_1 y = 0. \end{cases}$$

Damit ist das ganze Netz (Σ) der kollinearen c^6 erzeugenden Systeme bekannt:

$$(28a)\qquad (\Sigma) = \sigma_1' \Sigma_1 + \sigma_2' \Sigma_2 + \sigma_3' \Sigma_3 = 0$$

und also die notwendige und hinreichende Bedingung für die kollineare Erzeugungsmöglichkeit der Kummerschen Fläche erfüllt.

II. Die kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche K^4.

§ 3. Nachweis der K^4 erzeugenden Gebüsche kollinearer Räume im Anschluß an eine c^6.

1.) Bestimmung von 4 kollinearen K^4 erzeugenden Systemen.

Die kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche sind vollkommen bestimmt durch vier nicht einem Netze angehörende kollineare räumliche Ebenensysteme, von denen je drei eine auf K^4 enthaltene c^6 erzeugen. (Schur, S. 29.) Es besteht für uns demnach die Aufgabe, ein nicht dem Netze (Σ) (28a) angehöriges System Σ_4 so zu bestimmen, daß es mit dreien der Systeme von (Σ) K^4 erzeugt. Zur Erzielung eines einfachen analytischen Ausdrucks wählen wir als diese 3 Systeme die bekannten $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ (28). Von den das System

$$\Sigma_4 = \varkappa' f_{41} + \lambda' f_{42} + \mu' f_{43} + \nu' f_{44} = 0$$

bestimmenden Ebenen kann man drei so wählen, daß das durch sie bestimmte Bündel dem Gebüsche der c^6 erzeugenden Ebenenbündel angehört. Man darf also den Bündeln:

$$(29) \qquad \begin{cases} T_1 = \varkappa' \cdot 0 + \lambda' \delta_2 z + \mu' \delta_1 y = 0 \\ T_2 = \varkappa' \delta_2 z + \lambda' \cdot 0 + \mu' \delta x = 0 \\ T_3 = \varkappa' \delta_1 y + \lambda' \delta x + \mu' \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

der drei Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ das Bündel T_4

$$T_4 = \varkappa' f_{41} + \lambda' f_{42} + \mu' f_{43} = 0$$

in einem festen Punkte A_4 so zuordnen, daß sich entsprechende Ebenen der 4 Bündel T_i in Punkten von c^6 treffen. Nach früheren

Darlegungen sind den Bestimmungsebenen der Bündel T_1, T_2, T_3 im Bündel A_4 bezw. die Ebenen r, r_1, r_2 zugeordnet, so daß also

(29a) $$T_4 = \varkappa' \cdot r + \lambda' \cdot r_1 + \mu' \cdot r_2 = 0.$$

Die Gleichung von K^4 ergibt sich aus den Gleichungen der vier Systeme $\sum_i$ durch Elimination der Parameter $\varkappa'$, λ', μ', ν', also in Form der Determinante:

(30) $$\begin{vmatrix} 0 & \delta_2 z & \delta_1 y & r \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & r_2 \\ r & r_1 & r_2 & f_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Bestimmung von f_{44} und damit von $\sum_4$ führt die Tatsache, daß diese Gleichung (30) für Punkte der Fläche K^4 identisch verschwinden muß. Die nach den Größen der 4. Zeile entwickelte Determinante muß also z. B. für Punkt A_4 identisch erfüllt sein:

$$r D_{41} + r_1 D_{42} + r_2 D_{43} + f_{44} D_{44} = 0.$$

Von den ersten 3 Summanden ist jeder Faktor identisch Null; denn einmal gehen die Ebenen r, r_1, r_2 durch Punkt A_4, und zum andern verschwindet jede der Unterdeterminanten D_{41}, D_{42}, D_{43}, weil sie die Flächen F_1^3, F_2^3, F_3^3 darstellen (allerdings multipliziert bezw. mit den Koeffizienten δ, δ_1, δ_2). Daraus folgt:

$$f_{44} \cdot D_{44} = f_{44} \cdot 2\,\delta\,\delta_1\,\delta_2 \cdot F_0^3 = 0.$$

Nun ist aber Punkt A_4 sicher nicht auf F_0^3 vorhanden, also F_0^3 nicht identisch Null; folglich ist $f_{44} = 0$ für die Koordinaten von A_4. Da ferner Punkt A_4 Knotenpunkt von K^4 ist, so gelten für ihn die Gleichungen:

$$\frac{\partial f_{44}}{\partial\left(\frac{x}{t}\right)} = 0; \qquad \frac{\partial f_{44}}{\partial\left(\frac{y}{t}\right)} = 0; \qquad \frac{\partial f_{44}}{\partial\left(\frac{z}{t}\right)} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung der Ebene f_{44} als lineare Funktion der Unbekannten eine Konstante ist, und weil diese Konstante für Punkt A_4 verschwindet, muß sie identisch Null sein. Also ist ohne Einschränkung:

$$f_{44} \equiv 0, \text{ und}$$

(28b) $$\Sigma_4 = \varkappa' \cdot r + \lambda' \cdot r_1 + \mu' \cdot r_2 + \nu' \cdot 0 = 0$$

artet in ein Bündel aus.

Folglich ist die Gleichung der Kummerschen Fläche:

(30a) $$K^4 = \begin{vmatrix} 0 & \delta_2 z & \delta_1 y & r \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_1 y & d x & 0 & r_2 \\ r & r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese mit der historischen Form (Kummer, Abhandlungen, S. 64) identische Determinante charakterisiert sofort die K^4 als Symmetroid. (Vgl. Salmon-Fiedler, II, S. 468.)

2.) Die mit einer Gleichungsform gegebene Mannigfaltikeit von Erzeugungen der K^4.

Die 4 Systeme Σ_i bestimmen ein Gebüsch $[\Sigma]$ von kollinearen Räumen:

(28c) $$[\Sigma] = \sigma_1' \Sigma_1 + \sigma_2' \Sigma_2 + \sigma_3' \Sigma_3 + \sigma_4' \Sigma_4 = 0.$$

Irgend 4 Systeme aus $[\Sigma]$ erzeugen dann ebenfalls K^4; so sind mit der einen zugleich unendlich viele Erzeugungen verknüpft. (Schur, S. 28.) Irgend vier der Systeme des Gebüsches ergeben sich in der Form:

(28d) $$\Sigma_\nu' = \sigma_{\nu 1} \Sigma_1 + \sigma_{\nu 2} \Sigma_2 + \sigma_{\nu 3} \Sigma_3 + \sigma_{\nu 4} \Sigma_4 = 0$$
$$\nu = 1, 2, 3, 4.$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung die Σ_ν durch ihre Ausdrücke nach Gleichung (28) und (28b) und fassen die Faktoren von $\varkappa'$, λ', μ', ν' zusammen, so ergibt sich daraus für die K^4 erzeugenden Systeme der Ausdruck:

(28e) $$\begin{aligned} \Sigma_\nu' = \varkappa' [\sigma_{\nu 1} \cdot 0 &+ \sigma_{\nu 2} \cdot \delta_2 z + \sigma_{\nu 3} \cdot \delta_1 y + \sigma_{\nu 4} \cdot r \,] \\ + \lambda' [\sigma_{\nu 1} \cdot \delta_2 z &+ \sigma_{\nu 2} \cdot 0 + \sigma_{\nu 3} \cdot \delta x + \sigma_{\nu 4} \cdot r_1] \\ + \mu' [\sigma_{\nu 1} \cdot \delta_1 y &+ \sigma_{\nu 2} \cdot \delta x + \sigma_{\nu 3} \cdot 0 + \sigma_{\nu 4} \cdot r_2] \\ + \nu' [\sigma_{\nu 1} \cdot r &+ \sigma_{\nu 2} \cdot r_1 + \sigma_{\nu 3} \cdot r_2 + \sigma_{\nu 4} \cdot 0] = 0. \end{aligned}$$
$$\nu = 1, 2, 3, 4.$$

Ein Blick auf die Gleichung (30a) der Kummerschen Fläche lehrt dabei sofort, daß die unendlich vielen Erzeugungen ihren analytischen Ausdruck in der Umformung der Determinante (30a) durch Addition der mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Zeilen bezw. Kolonnen finden.

Zur Bestimmung der mit der kollinearen Erzeugung der Kummerschen Fläche verknüpften eindeutigen Transformation der Fläche in sich benützen wir die Analogie der durch 4 kollineare räumliche Systeme erzeugten K^4 mit der durch 3 kollineare ebene Systeme erzeugten ebenen Kurve 3. Ordnung und den Hinweis auf den analytischen Ausdruck für die eindeutige Transformation in sich selbst solcher durch Nullsetzen von Determinanten dargestellten Gebilde (Schur, S. 6 Anm.).[1]) Ist P (x, y, z, t) ein Punkt der Fläche K^4:

$$K^4 = \begin{vmatrix} 0 & \delta_2 z & \delta_1 y & a_2 y - a_1 z - bt \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & a_2 x - az + b_1 t \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & a_1 x - ay - b_2 t \\ a_2 y - a_1 z - bt & a_2 x - az + b_1 t & a_1 x - ay - b_2 t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so entspricht ihm der Punkt P' (x', y', z', t'), der durch die 4 Gleichungen:

---

[1]) Bei einer ebenen Kurve 3. Ordnung schlägt man folgendes Verfahren ein: Ist die Kurve 3. Ordnung dargestellt durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p'_x & q'_x & r'_x \\ p''_x & q''_x & r''_x \end{vmatrix} = 0,$$

so geht der Punkt x dieser Kurve über in einen Punkt y, der durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varkappa p_y + \lambda p'_y + \mu p''_y &= 0 \\ \varkappa q_y + \lambda q'_y + \mu q''_y &= 0 \\ \varkappa r_y + \lambda r'_y + \mu r''_y &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt ist. Durch Vertauschung von Horizontal- und Vertikalreihen ergibt sich entsprechend der Punkt x aus y. Dabei genügen die $\varkappa, \lambda, \mu$ den 3 Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \varkappa p_i + \lambda p'_i + \mu p''_i & \varkappa q_i + \lambda q'_i + \mu q''_i & \varkappa r_i + \lambda r'_i + \mu r''_i \\ p'_x & q'_x & r'_x \\ p''_x & q''_x & r''_x \end{vmatrix} = 0$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$
\begin{aligned}
&\varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot \delta_2 z' + \mu \cdot \delta_1 y' + \nu (a_2 y' - a_1 z' - b t') = 0\\
&\varkappa \cdot \delta_2 z' + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot \delta x' + \nu (a_2 x' - a z' + b_1 t') = 0\\
&\varkappa \cdot \delta_1 y' + \lambda \delta x' + \mu \cdot 0 + \nu (a_1 x' - a y' - b_2 t') = 0\\
&\varkappa (a_2 y' - a_1 z' - b t') + \lambda (a_2 x' - a z' + b_1 t')\\
&\qquad + \mu (a_1 x' - a y' - b_2 t') + \nu \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

bestimmt ist, wobei die $\varkappa$, λ, μ, ν den folgenden Gleichungen genügen:

$$
D_1 = \begin{vmatrix}
\varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \varkappa \cdot 0 + \lambda \delta & \varkappa \cdot 0 + \lambda a_2\\
+ \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 & + \mu \delta + \nu a_2 & + \mu \cdot 0 + \nu a_1 & + \mu a_1 + \nu \cdot 0\\
\delta_2 z & 0 & \delta x & a_2 x - a z + b_1 t\\
\delta_1 y & \delta x & 0 & a_1 x - a y - b_2 t\\
a_2 y - a_1 z - b t & a_2 x - a z + b_1 t & a_1 x - a y - b_2 t & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix}
\varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \varkappa \delta_1 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 & \varkappa a_2 + \lambda \cdot 0\\
+ \mu \delta_1 + \nu a_2 & + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 & + \nu (-a) & + \mu (-a) + \nu \cdot 0\\
\delta_2 z & 0 & \delta x & a_2 x - a z + b_1 t\\
\delta_1 y & \delta x & 0 & a_1 x - a y - b_2 t\\
a_2 y - a_1 z - b t & a_2 x - a z + b_1 t & a_1 x - a y - b_2 t & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
D_3 = \begin{vmatrix}
\varkappa \cdot 0 + \lambda \delta_2 & \varkappa \delta_2 + \lambda \cdot 0 & \varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \varkappa (-a_1) - \lambda a\\
+ \mu \cdot 0 + \nu (-a_1) & + \mu \cdot 0 + \nu (-a) & + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 & + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0\\
\delta_2 z & 0 & \delta x & a_2 x - a z + b_1 t\\
\delta_1 y & \delta x & 0 & a_1 x - a y - b_2 t\\
a_2 y - a_1 z - b t & a_2 x - a z + b_1 t & a_1 x - a y - b_2 t & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
D_4 = \begin{vmatrix}
\varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & \varkappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0 & - \varkappa b + \lambda b_1\\
+ \mu \cdot 0 + \nu (-b) & + \mu \cdot 0 + \nu b_1 & + \mu \cdot 0 + \nu (-b_2) & - \mu b_2 + \nu \cdot 0\\
\delta_2 z & 0 & \delta x & a_2 x - a z + b_1 t\\
\delta_1 y & \delta x & 0 & a_1 x - a y - b_2 t\\
a_2 y - a_1 z - b t & a_2 x - a z + b_1 t & a_1 x - a y - b_2 t & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

Es ist evident, daß der Punkt P' (x', y', z', t') dann wieder ein Punkt der K^4 ist, und daß sich umgekehrt der dem Punkt P' (x', y', z', t') entsprechende Punkt P (x, y, z, t) in derselben Weise gewinnen läßt. Es bleibt also nur noch der Nachweis übrig, daß sich die $\varkappa$, λ, μ, ν immer in der angegebenen Weise aus den 4 homogenen

Gleichungen als rationale Funktionen der singulären Ebenen und also auch der Koordinaten des Punktes P bestimmen lassen. Die 4 homogenen Gleichungen für $\varkappa$, λ, μ, ν ergeben nur dann von Null verschiedene Werte der Unbekannten, wenn die Determinante dieses Systems $D = 0$ ist oder die Relation:

$$x_1 D_1 + x_2 D_2 + x_3 D_3 + x_4 D_4 = 0$$

identisch erfüllt ist.

Multipliziert man die Gleichungen $D_\nu (\nu = 1, \ldots, 4)$ mit x, y, z, t, d. h. den Koordinaten eines Punktes der K^4, so erhält man nach Addition dieser 4 Gleichungen:

$$x D_1 + y D_2 + z D_3 + t D_4 = D = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} \varkappa \cdot 0 + \lambda \delta_2 z + \mu \delta_1 y + \nu (a_2 y - a_1 z - bt) & \varkappa \delta_2 z + \lambda \cdot 0 + \mu \delta x + \nu (a_2 x - az + b_1 t) & \varkappa \delta_1 y + \lambda \delta x + \mu \cdot 0 + \nu (a_1 x - ay - b_2 t) & \varkappa (a_2 y - a_1 z - bt) + \lambda (a_2 x - az + b_1 t) + \mu (a_1 x - ay - b_2 t) + \nu \cdot 0 \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & a_2 x - az + b_1 t \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & a_1 x - ay - b_2 t \\ a_2 y - a_1 z - bt & a_2 x - az + b_1 t & a_1 x - ay - b_2 t & 0 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante läßt sich nach einem Satz der Determinantentheorie in 4 Determinanten zerlegen:

$$\varkappa \cdot \begin{vmatrix} 0 & \delta_2 z & \delta_1 y & r \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & r_2 \\ r & r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & r_2 \\ r & r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \mu \cdot \begin{vmatrix} \delta_1 y & \delta x & 0 & r_2 \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & r_2 \\ r & r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} + \nu \cdot \begin{vmatrix} r & r_1 & r_2 & 0 \\ \delta_2 z & 0 & \delta x & r_1 \\ \delta_1 y & \delta x & 0 & r_2 \\ r & r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Faktoren von λ, μ, ν verschwinden, da die Determinanten je 2 gleiche Reihen enthalten. Der Koeffizient von $\varkappa$ ist Null, da der

Punkt (x, y, z, t) ein Punkt der K^4 sein soll. Also sind die 4 linearen homogenen Gleichungen für $\varkappa$, λ, μ, ν voneinander abhängig, also $D = 0$. Damit ist die Widerspruchslosigkeit des obigen Verfahrens zur Bestimmung des transformierten Punktes der Kummerschen Fläche erwiesen.

Aus dem Gebüsch [Σ] (28c) gewinnt man das konjugierte Gebüsch [T] von kollinearen räumlichen Ebenensystemen, indem man den 4 Ebenen eines Systems Σ_i die ihnen in 3 andern Räumen Σ_k, Σ_l, Σ_m entsprechenden Ebenen zuordnet. Irgend 4 Systeme T_i aus [T] erzeugen dann ebenfalls K^4. (Schur, S. 29.) Die 4 Systeme T_i, die am einfachsten mittels eines der Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ bestimmt werden, haben zu Bezugsebenen bezw. die in den Kolonnen der Determinante (30a) stehenden Ebenen:

$$(31)\qquad \begin{aligned} T_1 &= \vartheta_2\delta_2 z + \vartheta_3\delta_1 y + \vartheta_4 r = 0\\ T_2 &= \vartheta_1\delta_2 z + \vartheta_3\delta x + \vartheta_4 r_1 = 0\\ T_3 &= \vartheta_1\delta_1 y + \vartheta_2\delta x + \vartheta_4 r_2 = 0\\ T_4 &= \vartheta_1 r + \vartheta_2 r_1 + \vartheta_3 r_2 = 0 \end{aligned}$$

Aus der Symmetrie der Determinante (30a) folgt die Identität der Systeme $\sum_i$ und T_i und damit auch der Netze (T) und (Σ) und der Gebüsche [T] und [Σ]. Die Identität der Netze (T) und (Σ) besagt dabei, daß jede der durch (T) erzeugten Kurven g^6 (Vgl. Schur, S. 28) mit der ihr entsprechenden c^6 zusammenfällt — eine geometrische Eigenschaft, die der Kummerschen Fläche als Symmetroid zukommt.

Die Unterdeterminanten D_{ik} der Gleichung (30a) stellen, abgesehen vom Vorzeichen und von konstanten Koeffizienten, die Kummersche Fläche längs c^6 berührenden Flächen 3. Ordnung des F^3-Gebüsches dar:

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2\delta x r_1 r_2; & D_{12} &= D_{21} = r_2 \cdot F_3^2;\\ D_{31} &= D_{13} = r_1 \cdot F_2^2; & D_{41} &= D_{14} = \delta x \cdot F_1^2;\\ D_{22} &= 2\delta_1 y r r_2; & D_{23} &= D_{32} = r \cdot F_1^2;\\ D_{42} &= D_{24} = \delta_1 y \cdot F_2^2; & D_{33} &= 2\delta z r r_1;\\ D_{34} &= D_{43} = \delta_2 z \cdot F_3^2; & D_{44} &= 2\delta x \cdot \delta_1 y \cdot \delta_2 z = 2\delta\delta_1\delta_2 x y z. \end{aligned}$$

Davon stellen die Unterdeterminanten D_{ii} wegen ihrer symmetrischen Eigenschaften Symmetroide dar, die 4 in je 3 singuläre

Tangentialebenen der Kummerschen Fläche zerfallenden Kegel 3. Ordnung:

$x\, r_1\, r_2$ mit der Spitze A_1,
$y\, r\, r_2$ „ „ „ A_2,
$z\, r\, r_1$ „ „ „ A_3,
$x\, y\, z$ „ „ „ A_8,

Die übrigen 6 Flächen F_2^3 entarten bezw. in eine der Flächen F_1^2, F_2^2, F_3^2 und eine der 6 singulären Ebenen: x, y, z, r, r_1, r_2.

§ 4. Erfassung aller kollinearen Erzeugungen der K^4.

1.) Mehrfache Bestimmungsmöglichkeiten der c^6.

Die bisherigen kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche erschöpfen noch nicht alle Möglichkeiten der kollinearen Erzeugungsweise; denn erstens erfolgten sie ausgehend von einer bestimmten c^6 (Vgl. S. 11), und zweitens wurde unter den gleichberechtigten 3 Tripeln homologer Punkte von c^6:

$$A_1,\ A_2,\ A_3;\ A_9,\ A_{10},\ A_{11};\ A_{13},\ A_{14},\ A_{15}$$

zur Bestimmung der c^6 das erste gewählt. Das führte in der Folge bei Aufstellung der Gleichungen von c_x^2, c_y^2, c_z^2 zu einer Bevorzugung der Ebenen α_5, α_6, α_7 gegenüber den gleichberechtigten α_{13}, α_{14}, α_{15} und α_9, α_{10}, α_{11} und damit auch bei Bestimmung der Grundflächen des F^3-Gebüsches und bei Wahl der Bündelzentren zu einer Heraushebung ihres Schnittpunktes A_4 vor den gleichberechtigten entsprechenden Punkten A_{12} und A_{16}.

Es sollen nun zunächst die kollinearen Erzeugungen der K^4 mit Hilfe der Ebenen α_{13}, α_{14}, α_{15} bezw. α_9, α_{10}, α_{11} gefunden werden. Da durch 18 Konstanten die Kummersche Fläche vollständig bestimmt ist, so lassen sich aus den bekannten Punkten A_ν und Ebenen α_ν ($\nu = 1, 2 \ldots . 8$) und den Gleichungen der Kegelschnitte c_x^2, c_y^2, c_z^2 die Ebenen α_{13}, α_{14}, α_{15} bezw. α_9, α_{10}, α_{11} berechnen.

Als Durchschnitt der Ebene α_5 (2a) mit dem Kegelschnitt c_x^2 (14) ergeben sich die beiden Punkte A_{13} und A_9:

(2a) $a_2 y - a_1 z - b t = 0$

(14) $[r_1 \delta_1 y - r_2 \delta_2 z]_{x=0} = 0$ oder

$\delta_2 z (-ay - b_2 t) - \delta_1 y (az - b_1 t) = 0$

(14a) $a y z (\delta_1 + \delta_2) - y t b_1 \delta_1 + z t b_2 \delta_2 = 0$

Aus Gleichung (2a) wird $\frac{x}{t}$ ausgedrückt und in (14a) eingesetzt. Dadurch erhält man unter Benutzung der Identität (4) eine quadratische Gleichung für $\frac{z}{t}$ mit den Wurzeln:

$$\frac{z}{t} = \frac{1}{2 a a_1 \delta}(-ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 + a_2 b_2 \delta_2 \pm d),$$

wobei:

$$d^2 = a^2 b^2 \delta^2 + a_1^2 b_1^2 \delta_1^2 + a_2^2 b_2^2 \delta_2^2$$
$$- 2\, ab\delta\, a_1 b_1 \delta_1 - 2\, ab\delta\, a_2 b_2 \delta_2 - 2\, a_1 b_1 \delta_1 a_2 b_2 \delta_2.$$

Aus (2a) folgt so:

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2 a a_2 \delta}(ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 + a_2 b_2 \delta_2 \pm d),$$

und es ergeben sich die Koordinaten der Punkte A_{13} und A_9 in der Form:

$$x = 0,\ y = -t \cdot \frac{b}{a_2} \cdot \frac{1}{2 a b \delta}(-ab\delta + a_1 b_1 \delta_1 - a_2 b_2 \delta_2 \pm d),$$

$$z = t \cdot \frac{b}{a_1} \cdot \frac{1}{2 a b \delta}(-ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 + a_2 b_2 \delta_2 \mp d)$$

oder in der einfacheren Form:

(32) $x = 0,\ y = -t \cdot \frac{b}{a_2} d_1,\ z = t \cdot \frac{b}{a_1} d_2$, bezw.

(32a) $x = 0,\ y = -t \cdot \frac{b}{a_2} d'_1,\ z = t \cdot \frac{b}{a_1} d'_2.$

In analoger Weise errechnen sich die Punkte A_{14} und A_{10} aus den Gleichungen der Ebene α_6 (2b) und des Kegelschnitts c_y^2 (15):

(2b) $r_1 = a z - a_2 x - b_1 t = 0$

(15a) $c_y^2 = \delta_2 z (a_1 x - b_2 t) - \delta x(-a_1 z - b t) = 0$

Die Substition von $\frac{x}{t}$ aus (2b) in (15a) führt hier auf die Wurzeln:

$$\frac{z}{t} = \frac{1}{2 a a_1 \delta_1}(ab\delta + a_1 b_1 \delta_1 - a_2 b_2 \delta_2 \pm d),$$

woraus für $\frac{x}{t}$ folgt:

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2\,a_1 a_2 \delta_1}\,(ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 - a_2 b_2 \delta_2 \mp d).$$

Die Koordinaten der Punkte A_{14} und A_{10} sind demnach:

$$y = 0,\ x = t \cdot \frac{b_1}{a_2} \cdot \frac{1}{2\,a_1 b_1 \delta_1}\,(ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 - a_2 b_2 \delta_2 \mp d),$$

$$z = -t \cdot \frac{b_1}{a} \cdot \frac{1}{2\,a_1 b_1 \delta_1}\,(-ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 + a_2 b_2 \delta_2 \pm d),$$

oder kürzer:

(33) $$y = 0,\ x = t \cdot \frac{b_1}{a_2} d_3,\ z = -t \cdot \frac{b_1}{a} d_4,\ \text{bezw.}$$

(33a) $$y = 0,\ x = t \cdot \frac{b_1}{a_2} d'_3,\ z = -t \cdot \frac{b_1}{a} d'_4.$$

Endlich ergeben sich die Punkte A_{15} und A_{11} aus den Gleichungen der Ebene α_7 (2c) und des Kegelschnitts c_z^2 (16):

(2c) $$r_2 = a_1 x - a y - b_2 t = 0$$

(16a) $$c_z^2 = \delta x\,(a_2 y - b t) - \delta_1 y\,(-a_2 x - b_1 t) = 0$$

Die Einführung von $\frac{y}{t}$ aus (2c) in (16a) ergibt die Werte:

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2\,a_1 a_2 \delta_2}\,(-ab\delta + a_1 b_1 \delta_1 + a_2 b_2 \delta_2 \pm d)$$

und darausfolgend:

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2\,a_1 a_2 \delta_2}\,(-ab\delta + a_1 b_1 \delta_1 - a_2 b_2 \delta_2 \pm d).$$

Danach gelten für die Punkte A_{15} und A_{11} die Werte:

$$z = 0,\ x = -t \cdot \frac{b_2}{a_1} \cdot \frac{1}{2\,a_2 b_2 \delta_2}\,(ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 - a_2 b_2 \delta_2 \mp d),$$

$$y = t \cdot \frac{b_2}{a} \cdot \frac{1}{2\,a_2 b_2 \delta_2}\,(-ab\delta + a_1 b_1 \delta_1 - a_2 b_2 \delta_2 \mp d),$$

oder:

(34) $$z = 0,\ x = -t \cdot \frac{b_2}{a_1} d_5,\ y = t \cdot \frac{b_2}{a} d_6;\ \text{bezw.}$$

(34a) $$z = 0,\ x = -t \cdot \frac{b_2}{a_1} d'_5,\ y = t \cdot \frac{b_2}{a} d'_6.$$

Nun lassen sich aber die Koordinaten der Punkte A_{13}, A_{14}, A_{15} bezw. A_9, A_{10}, A_{11} bedeutend einfacher schreiben mit Rücksicht auf die Beziehungen, die zwischen den d_i bezw. d'_i bestehen. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß:

$$(35)\quad \begin{cases} d_1 + d_2 = -1, & d_3 + d_4 = -1, & d_5 + d_6 = -1; \\ d_1 \cdot d_6 = 1, & d_2 \cdot d_4 = 1, & d_3 \cdot d_5 = 1. \end{cases}$$

Daraus folgt, wenn man:

$$d_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon},\ d_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \quad \text{setzt,}$$

$$(36)\qquad \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,$$

so daß: $$d_3 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},\ d_4 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1},\ d_5 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},\ d_6 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}.$$

Die Richtigkeit dieses Resultates ergibt sich daraus, daß jede der Gleichungen (35) stets die Identität (36) bestätigt. Ganz analoge Gleichungen gelten für die d'_i. Aus der Gleichung:

$$d_4 \cdot d'_4 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_1} = \frac{1}{4\,(a_1 b_1 \delta_1)^2}[(-ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 + a_2 b_2 \delta_2)^2 - d^2]$$

folgt:

$$\varepsilon\varepsilon' : \varepsilon_1 \varepsilon'_1 = ab\delta : a_1 b_1 \delta_1.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\varepsilon\varepsilon' : \varepsilon_2 \varepsilon'_2 = ab\delta : a_2 b_2 \delta_2,$$

sodaß:

$$(37)\qquad \varepsilon : \varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \frac{ab\delta}{\varepsilon'} : \frac{a_1 b_1 \delta_1}{\varepsilon'_1} : \frac{a_2 b_2 \delta_2}{\varepsilon'_2},$$

also auch:

$$(37a)\qquad \varepsilon' + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = 0.$$

Ferner folgt aus der Gleichung:

$$d_2^2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{4\,(ab\delta)^2}\,[2\,(a^2b^2\delta^2 + a_1^2 b_1^2 \delta_1^2 + a_2^2 b_2^2 \delta_2^2)$$
$$- 4\,ab\delta\, a_2 b_2 \delta_2 - 4\,a_1 b_1 \delta_1\, a_2 b_2 \delta_2$$
$$+ 2\,d\,(-ab\delta - a_1 b_1 \delta_1 + a_2 b_2 \delta_2)]$$

oder:

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{2(ab\delta)^2}\,[a^2b^2\delta^2 + a_1^2b_1^2\delta_1^2 + a_2^2b_2^2\delta_2^2 - 2\,ab\delta\,a_2b_2\delta_2 - 2\,a_1b_1\delta_1\,a_2b_2\delta_2 \mp d\,(-ab\delta - a_1b_1\delta_1 + a_2b_2\delta_2)]$$

$$= \frac{-1}{2(ab\delta)^2}(ab\delta + a_1b_1\delta_1 - a_2b_2\delta_2)\,(-ab\delta - a_1b_1\delta_1 + a_2b_2\delta_2 \mp d) - \frac{a_1b_1\delta_1}{ab\delta}$$

die Gleichung:

(38) $\delta\,ab\,\varepsilon_1^2 + (\delta\,ab + \delta_1a_1b_1 - \delta_2a_2b_2)\,\varepsilon\varepsilon_1 + \delta_1a_1b_1\varepsilon^2 = 0.$

Damit sind also die Koordinaten der 3 Punktepaare eindeutig festgelegt:

(32b) $A_{13}\left(0, -\frac{\varepsilon_2}{a_2}, \frac{\varepsilon_1}{a_1}, \frac{\varepsilon}{b}\right)$, $A_9\left(0, -\frac{\varepsilon'_2}{a_2}, \frac{\varepsilon'_1}{a_1}, \frac{\varepsilon'}{b}\right)$;

(33b) $A_{14}\left(\frac{\varepsilon_2}{a_2}, 0, -\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon_1}{b_1}\right)$, $A_{10}\left(\frac{\varepsilon'_2}{a_2}, 0, -\frac{\varepsilon'}{a}, \frac{\varepsilon'_1}{b_1}\right)$;

(34b) $A_{15}\left(-\frac{\varepsilon_1}{a_1}, \frac{\varepsilon}{a}, 0, \frac{\varepsilon_2}{b_2}\right)$, $A_{11}\left(-\frac{\varepsilon'_1}{a_1}, \frac{\varepsilon'}{a}, 0, \frac{\varepsilon'_2}{b_2}\right)$.

(Vgl. Kummer, Abhandlungen, S. 65.)

Mit Hilfe von Punkt A_{13}, A_5, A_1 bestimmt man die Koordinaten der Ebene α_{13}. Es ergibt sich für:

$$\begin{aligned} A_5 &: u_1 = 0 \\ A_{13} &: u_2\varepsilon_2a_1b - u_3\varepsilon_1a_2b - u_4\varepsilon a_1a_2 = 0 \\ A_1 &: u_2b_2 - u_3b_1 - u_4a = 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man die letzten beiden Gleichungen mit b_2 und ε_2a_1b bezw. b_1 und ε_1a_2b und subtrahiert jedesmal die untere von der oberen, so folgt aus den 2 sich ergebenden Gleichungen die Relation:

$$u_2 : u_3 : u_4 = a_2(ab\varepsilon_1 - a_1b_1\varepsilon) : -a_1(a_2b_2\varepsilon - ab\varepsilon_2) : -b(a_1b_1\varepsilon_2 - a_2b_2\varepsilon_1).$$

Um diese Form zu vereinfachen, ersetzen wir die Größen ε durch die ε' nach der Identität (37), bringen die Differenzen auf ihre

Hauptnenner und dividieren die Glieder der rechten Seite durch den Proportionalitätsfaktor $\frac{a b a_1 b_1 a_2 b_2}{\varepsilon' \varepsilon'_1 \varepsilon'_2}$; so folgt:

$$u_2 : u_3 : u_4 = \frac{\varepsilon'_2}{b_2}(\delta_1 \varepsilon' - \delta \varepsilon'_1) : -\frac{\varepsilon'_1}{b_1}(\delta \varepsilon'_2 - \delta_2 \varepsilon') : -\frac{\varepsilon'}{a}(\delta_2 \varepsilon'_1 - \delta_1 \varepsilon'_2).$$

Nun ist aber nach den Identitäten (4) und (37a):

$$\delta \varepsilon'_2 - \delta_2 \varepsilon' = (\delta_1 + \delta_2)(\varepsilon' + \varepsilon'_1) - \delta_2 \varepsilon' = \delta_1 \varepsilon' - \delta \varepsilon'_1$$

und:

$$\delta_2 \varepsilon'_1 - \delta_1 \varepsilon'_2 = -(\delta_1 + \delta) \varepsilon'_1 + \delta_1 (\varepsilon' + \varepsilon'_1) = \delta_1 \varepsilon' - \delta \varepsilon'_1,$$

also:

$$u_2 : u_3 : u_4 = \frac{\varepsilon'_2}{b_2} : -\frac{\varepsilon'_1}{b_1} : -\frac{\varepsilon'}{a}.$$

Ebene α_{13} hat also die Gleichung:

(39 a) $$\rho = \frac{\varepsilon'_2}{b_2} y - \frac{\varepsilon'_1}{b_1} z - \frac{\varepsilon'}{a} t = 0.$$

In ganz analoger Weise bestimmen die Punkte A_2, A_6, A_{14} bew. A_3, A_7, A_{15} die Ebenen α_{14} und α_{15} in der Form:

(39 b) $$\rho_1 = \frac{\varepsilon'}{b} z - \frac{\varepsilon'_2}{b_2} x - \frac{\varepsilon'_1}{a_1} t = 0,$$

(39 c) $$\rho_2 = \frac{\varepsilon'_1}{b_1} x - \frac{\varepsilon'}{b} y - \frac{\varepsilon'_2}{a_2} t = 0.$$

In derselben Weise ergeben die Punkte A_9, A_{10}, A_{11} mit den Punkten A_1 und A_5 bezw. A_2 und A_6 bezw. A_3 und A_7 die Gleichungen der Ebenen α_9, α_{10}, α_{11}:

(40 a) $$\rho'_1 = \frac{\varepsilon_2}{b_2} y - \frac{\varepsilon_1}{b_1} z - \frac{\varepsilon}{a} t = 0,$$

(40 b) $$\rho'_1 = \frac{\varepsilon}{b} z - \frac{\varepsilon_2}{b_2} x - \frac{\varepsilon_1}{a_1} t = 0,$$

(40 c) $$\rho'_2 = \frac{\varepsilon_1}{b_1} x - \frac{\varepsilon}{b} y - \frac{\varepsilon_2}{a_2} t = 0.$$

Wir ersetzen nun im Gang unserer ersten Untersuchung der kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche die Ebenen α_5, α_6, α_7 durch die beiden andern Tripel α_{13}, α_{14}, α_{15} bezw. α_9, α_{10} α_{11}. Mit Hilfe der Ebenen α_{13}, α_{14}, α_{15} ergibt sich die Gleichung c_x^2 in der Form:

(14b) $$c_x^2 = [\varrho_1 \gamma_1 y - \varrho_2 \gamma_2 z]_{x=0} = 0.$$

Die den Größen δ, δ_1, δ_2 entsprechenden Konstanten γ, γ_1, γ_2 bestimmen wir durch Vergleich dieser Gleichung (14b) mit der früher gewonnenen (14), indem wir in beiden die Werte für die r und ϱ einsetzen:

(14a) $$-a\delta yz - yt b_1 \delta_1 + zt b_2 \delta_2 = 0$$

(14c) $$\lambda\left[\frac{\varepsilon}{b}(\gamma_1+\gamma_2)yz - yt\gamma_1\frac{\varepsilon'_1}{a_1} + zt\gamma_2\frac{\varepsilon'_2}{a_2}\right] = 0.$$

Da diese beiden Gleichungen identisch sein sollen, so müssen die Koeffizienten von $y \cdot t$ und $z \cdot t$ gleich sein:

$$\lambda \cdot \gamma_1 \frac{\varepsilon'_1}{a_1} = b_1\delta_1, \qquad \lambda \cdot \gamma_2 \frac{\varepsilon'_2}{a_2} = b_2\delta_2,$$

oder:

$$\gamma_1 = \frac{a_1 b_1 \delta_1}{\lambda \varepsilon'_1}; \qquad \gamma_2 = \frac{a_2 b_2 \delta_2}{\lambda \varepsilon'_2}.$$

Also ist:

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2.$$

Die Richtigkeit dieser Schlußweise bestätigt der Vergleich der Koeffizienten von $y \cdot z$ nach Einsetzen der gefundenen Werte für die γ:

$$-a\delta = \frac{\varepsilon'}{b}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -\frac{\varepsilon'\varepsilon}{b};$$

denn das führt zur bekannten Identität:

(37) $$\frac{ab\delta}{\varepsilon} = \varepsilon'.$$

Wir können also die Gleichungen der c^6 bildenden Kegelschnitte auch in der Form schreiben:

(14 d) $$c_x^2 = [\varrho_1 \varepsilon_1 y - \varrho_2 \varepsilon_2 z]_{x=0} = 0,$$

(15 a) $$c_y^2 = [\varrho_2 \varepsilon_2 z - \varrho\ \varepsilon\ x]_{y=0} = 0,$$

(16 a) $$c_z^2 = [\varrho\ \varepsilon\ x - \varrho_1 \varepsilon_1 y]_{z=0} = 0.$$

Das F^3-Gebüsch durch diese c^6 wird dann analog bestimmt durch die 4 Flächen:

(17) $$\Phi_0^3 = F_0^3 = xyz = 0,$$

(18 a) $$\Phi_1^3 = x\,[-\varrho\,\varepsilon\,x + \varrho_1 \varepsilon_1 y + \varrho_2 \varepsilon_2 z] = 0,$$

(19 a) $$\Phi_2^3 = y\,[\ \varrho\,\varepsilon\,x - \varrho_1 \varepsilon_1 y + \varrho_2 \varepsilon_2 z] = 0,$$

(20 a) $$\Phi_3^3 = z\,[\ \varrho\,\varepsilon\,x + \varrho_1 \varepsilon_1 y - \varrho_2 \varepsilon_2 z] = 0,$$

die sich bezw. aus den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und den Flächen 2. Ordnung Φ_1^2 durch 2 der Kegelschnitte c_x^2, c_y^2, c_z^2 und Punkt A_{12} zusammensetzen. Mittels der Schnittkurven je zweier der Flächen Φ_1^3, Φ_2^3, Φ_3^3 werden dann das Bündel A_{12} und die Büschel $A_8\,A_7$, $A_8\,A_6$, $A_8\,A_5$ in ganz analoger Weise wie oben aufeinander kollinear bezogen, so daß sie zu je dreien bezw. die Flächen Φ_1^3 und alle 4 die Kurve c^6 erzeugen. Zu dem aus ihnen gewonnenen Netz kollinearer Systeme wird dann wieder analog oben ein 4. System bestimmt, das mit dreien der Systeme des Netzes die Kummersche Fläche in der Form erzeugt:

(41) $$K_4 = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_2 z & \varepsilon_1 y & \varrho \\ \varepsilon_2 z & 0 & \varepsilon x & \varrho_1 \\ \varepsilon_1 y & \varepsilon x & 0 & \varrho_2 \\ \varrho & \varrho_1 & \varrho_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Verwendet man nun die Ebenen α_9, α_{10}, α_{11} zur Bestimmung der Kegelschnitte c_x^2, c_y^2, c_z^2 und Erzeugung der c^6, so ergibt sich in derselben Weise die Gleichung der Kummerschen Fläche in der analogen Form:

(42) $$K^4 = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon'_2 z & \varepsilon'_1 y & \varrho' \\ \varepsilon'_2 z & 0 & \varepsilon' x & \varrho'_1 \\ \varepsilon'_1 y & \varepsilon' x & 0 & \varrho'_2 \\ \varrho' & \varrho'_1 & \varrho'_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die aus den beiden Determinanten (41) und (42) erkennbaren Gebüsche kollinearer Systeme, die die Kummersche Fläche erzeugen, unterscheiden sich nicht wesentlich von dem ersten (28c), da die in ihnen enthaltenen Netze dieselben Kurven c^6 erzeugen.

2.) Die Mannigfaltigkeit der Kurven c^6 auf K^4.

Wesentlich andere Gebüsche kollinearer Erzeugungen der Kummerschen Fläche erhält man, indem man von einer anderen c^6 als der in die 3 Kegelschnitte α_1, α_2, α_3 zerfallenden ausgeht. Die Anzahl der Kurven 6. Ordnung, die sich aus 3 Tangentialkegelschnitten zusammensetzen lassen ganz analog der ersten c^6 aus c_x^2, c_y^2, c_z^2, ist leicht aus der Tabelle zu bestimmen. Die Anzahl der Kombinationen der 6 durch einen Knotenpunkt gehenden singulären Ebenen zur 3. Klasse ist: $\binom{6}{3} = 20$. Da nun irgend *2* Kegelschnitte der Kummerschen Fläche nie mehr als 3 Punkte gemein haben (Vgl. Reye, Borchardts Journal Bd. 86, S. 102 oder Tabelle), so sind die beiden zu irgend *2* Knotenpunkten gehörenden Gruppen von Kombinationen der Kegelschnitte ganz voneinander verschieden. Also ist die Gesamtzahl der aus 3 durch einen Punkt gehenden Kegelschnitten zusammengesetzten Kurven 6. Ordnung $16 \cdot 20 = 320$, und von jeder dieser c^6 ausgehend gelangt man zu unendlich vielen kollinearen Erzeugungen der Kummerschen Fläche.

Lebenslauf.

Geboren am 3. August 1897 zu Schwerin i. M., bestand ich in Breslau Ostern 1916 die Schlußprüfung des Oberlyzeums und erwarb im März des folgenden Jahres das Zeugnis der Lehrbefähigung für Lyzeen und im Herbst 1918 in Kattowitz O/S die Reife einer Studienanstalt der Oberrealschulrichtung. Von Oktober 1917—23 studierte ich an der Universität Breslau Philosophie, Mathematik, Erdkunde, Physik und Chemie. Die Förderung meiner mathematischen Studien verdanke ich den Herren Geheimräten F. Schur und Kneser. Nach Ablegung der wissenschaftlichen und der pädagogischen Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen widmete ich mich seit Herbst 1924 dem höheren Schuldienst.

Maria Bienias.